

Měření modulu pružnosti

1. Podmínky v laboratoři:

$$T = 21,7^{\circ} C$$

$$p = 98542 \text{ Pa}$$

$$\rho = 56 \%$$

2. Teorie:

I) Měření modulu pružnosti z průhybu plného obdélníkového nosníku

Uvažovali jsme nosník o délce ℓ , šířce b a tloušťce a , pak hledaný modul pružnosti se počítá podle vzorce:

$$E = \frac{F l^3}{4 y a^3 b} \quad (1)$$

přičemž průhyb nosníku je označen jako y a síla F se počítá jako $m \cdot g$ (g je tíhové zrychlení) tak, že

$$E = \frac{m g l^3}{4 y a^3 b} \quad (2)$$

II) Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Provádí se tak, že na homogenní ocelový drát (délky l a průměru r) byla pověšena olověná koule

(tabulkové hustoty $\rho = 11\,340 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ a průměru R) hmotnosti mnohem větší než je hmotnost drátu. Když se koule dá do smykového pohybu, tak se její modul pružnosti dá popsat vzorcem:

$$G = \frac{8 \pi l J}{\left(\frac{r}{2}\right)^4 T^2} \quad (3).$$

kde J je moment setrvačnosti koule a T je doba kmitu.

3. Měření:

I)

a) Hmotnosti závaží (válečků) jsou změřena na digitálních vahách s chybou měření 0,001 g . Průhyby jsou dané v následující tabulce.

Jednotlivé hmotnosti [g]	Součet hmotností [g]	Jednotlivé průhyby [mm]	Součet průhybů [mm]
99,675	99,675	0,4	0,4
99,665	199,34	0,55	0,95
99,005	298,345	0,615	1,565
99,765	398,11	0,465	2,03

Jednotlivé hmotnosti [g]	Součet hmotností [g]	Jednotlivé průhyby [mm]	Součet průhybů [mm]
99,792	497,902	0,55	2,58
99,705	597,607	0,52	3,1
99,668	697,275	0,55	3,65
99,412	1592,962	0,50	4,15
99,440	1692,402	0,595	4,745
99,158	1791,56	0,495	5,240

Tabulka 1.

Toto jsou průhyby při zatěžování.

b) Délka nosníku $\ell = 93,55 \text{ cm}$ a je měřená metrem, co znamená, že chyba měření je $0,5 \text{ mm}$.

A relativní chyba je $\sigma_{rl} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{93,55 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \cdot 100 \% = 0,053 \%$

c) Tloušťka a je měřená mikrometrem pětkrát :

a_1 [mm]	a_2 [mm]	a_3 [mm]	a_4 [mm]	a_5 [mm]
5,11	5,04	5,03	5,01	5,09

Tabulka 2.

Absolutní chyba při měření tloušťky nosníku je:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum (a_i - a)^2}{N(N-1)}}, (4)$$

příčemž je N počet měření a a střední hodnota hmotností. Pro můj případ $a = 5,056 \text{ mm}$,

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{0,00712}{20}} = 0,01882 \text{ mm}$$

A relativní chyba je $\sigma_{ra} = \frac{\sigma_a}{a} \cdot 100 \% = \frac{0,01882}{5,056} \cdot 100 \% = 0,256 \%$ (5)

d) Šířka b je daná v tabulce a hodnoty jsou naměřené posuvným měřítkem.

b_1 [cm]	b_2 [cm]	b_3 [cm]	b_4 [cm]	b_5 [cm]
2,89	2,90	2,85	2,84	2,85

Tabulka 3.

Střední hodnota šířky $b = 2,884 \text{ cm}$

Absolutní chyba šířky je

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum (b_i - b)^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\frac{0,01372}{9}} = 0,02904 \text{ cm}$$

a relativní

$$\sigma_{rb} = \frac{0,02904}{2,884} \cdot 100\% = 0,653\%$$

4. Výpočet

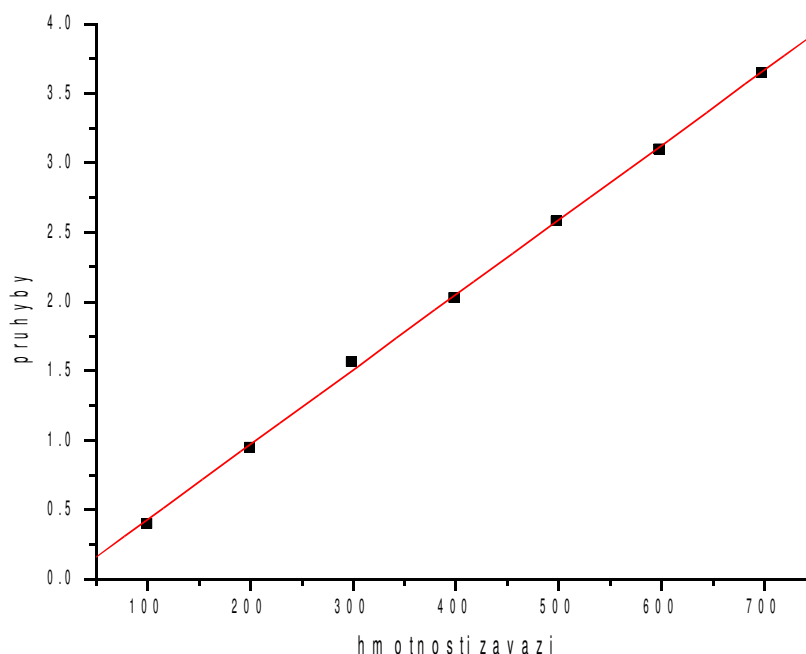
I)

Při výpočtu budu používat vzorec (2). Použiji ho ve tvaru $y = \frac{g l^3}{4 E a^3 b} \cdot m$ (5), z čehož je vidět, že

průhyb je přímo úměrný hmotnosti závaží a koeficient úměrnosti je $p = \frac{g l^3}{4 E a^3 b}$ (6).

V grafu jsou hmotnosti na x-ové souřadnici a odpovídající průhyby na y-ové souřadnici.

Hmotnosti-x	Průhyby-y
99,68	0,4
199,34	0,95
298,35	1,57
398,11	2,03
497,9	2,58
597,61	3,1
697,28	3,65
1592,96	4,15
1692,4	4,75
1791,56	5,24



Graf 1.

Z Grafu 1. plyne, že směrnice je $p = 0,0054$ s relativní chybou $\sigma_{rp} = 6,69 \cdot 10^{-5}$.

Pak,

$$E = \frac{g l^3}{4 p a^3 b} = \frac{9,8099 \frac{m}{s^2} \cdot (93,55 \cdot 10^{-2} m)^3}{4 \cdot 0,0054 \frac{m}{kg} \cdot (5,056 \cdot 10^{-3} m)^3 \cdot 2,884 \cdot 10^{-2} m} = \frac{8,03148}{8,001} \cdot 10^{11} = 1,103 \cdot 10^{11} Pa$$

Relativní chyba při tomto výpočtu je,

$$\sigma_{\mathfrak{R}} = \sqrt{(3 \cdot \sigma_{r_l})^2 + (3 \cdot \sigma_{r_a})^2 + (\sigma_{r_b})^2} = \sqrt{0,0000025 + 0,0000927 + 0,000183} = \sqrt{0,0002783} = 1,66844 \%$$

Absolutní chyba se počítá jako $\sigma_E = \frac{\sigma_{\mathfrak{R}} \cdot E}{100} = 0,0166844 \cdot 1,103 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 0,02013 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

Pak tedy modul pružnosti vychází

$$E = (1,10 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa} \text{ s relativní chybou } 1,67\%$$

3. Měření:

II)

a) Délka drátu je změřena katetometrem. Měření bylo provedeno třikrát a výsledky jsou v tabulce.

l_1 [cm]	l_2 [cm]	l_3 [cm]
29,68	30,1	30,09

Tabulka 4.

Střední hodnota délky je $l = 29,9566 \text{ cm}$,

absolutní chyba $\sigma_l = 0,1400 \text{ cm}$ a relativní $\sigma_{r_l} = 0,467\%$.

b) Průměr drátu je pětkrát měřen mikrometrem.

r_1 [mm]	r_2 [mm]	r_3 [mm]	r_4 [mm]	r_5 [mm]
1,00	1,01	1,08	1,07	1,02

Tabulka 5.

Střední hodnota průměru drátu je $r = 1,036 \text{ mm}$,

absolutní chyba $\sigma_r = 0,02431 \text{ mm}$ a relativní $\sigma_{r_r} = 1,57374\%$.

c) Hmotnost koule je $m = 5,905 \text{ g}$

d) Průměr koule je naměřen posuvným měřítkem a výsledky jsou v tabulce.

R_1 [cm]	R_2 [cm]	R_3 [cm]	R_4 [cm]	R_5 [cm]
10,02	10,00	10,01	9,97	10,02

Tabulka 6.

$R = 10,004 \text{ cm}$ s absolutní chybou $\sigma_R = 0,013824 \text{ cm}$ a relativní chybou $\sigma_{r_R} = 0,13818\%$.

d) Perioda kmitu byla měřena stopkami. Zde jsou uvedené periody deseti oscilací.

T_1 [s]	T_2 [s]	T_3 [s]	T_4 [s]
30,37	31,10	30,03	30,50

Tabulka 7.

Tedy $T = 30,50 \text{ s}$, $\sigma_T = 0,2231 \text{ s}$, $\sigma_{rT} = 0,73179 \%$.

4. Výpočet:

II)

Ve vzorci (3) se vyskytuje i moment setrvačnosti koule,

$$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot 5,905 \cdot (5,002 \cdot 10^{-2})^2 = 0,005909 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Relativní chyba vzniklá tímto výpočtem je:

$$\sigma_{rJ} = 2 \cdot \sigma_{rR} = 0,276 \% \quad \text{a absolutní chyba} \quad \sigma_J = 0,00276 \cdot 0,005909 = 0,0000163 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Nakonec následuje výpočet ze vzorce (3):

$$G = \frac{8\pi l J}{\left(\frac{r}{2}\right)^4 T^2} = \frac{8 \cdot 3,1415 \cdot 29,9566 \text{ m} \cdot 10^{-2} \cdot 0,005909 \text{ kg m}^2}{\left(\frac{1,036 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2}\right)^4 \cdot (30,5 \text{ s})^2} = 6,6428 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

Relativní chyba při výpočtu je :

$$\sigma_{rG} = \sqrt{(\sigma_{rI})^2 + (\sigma_{rJ})^2 + (4 \cdot \sigma_{rR})^2 + (2 \sigma_{rT})^2} = \sqrt{(0,0047)^2 + (0,00276)^2 + (4 \cdot 0,01573)^2 + (2 \cdot 0,00731)^2}$$

$$\sigma_{rG} = \sqrt{0,0042020} = 0,06482 = 6,5 \%$$

$$\sigma_G = 0,06482 \cdot 6,6428 = 0,430586 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$G = (6,6428 \pm 0,4305) \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad \text{s relativní chybou } 6,5\%.$$

5. Závěr:

- I) Modul pružnosti v tahu plného obdélníkového nosníku vyšel $E = (1,10 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ s relativní chybou 1,67%. To odpovídá tabulkové hodnotě pro šedou litinu (E od $6,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ do $1,40 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$).
- II) Modul pružnosti ve smyku pro kovovou kouli vyšel $G = (6,6428 \pm 0,4305) \cdot 10^9 \text{ Pa}$ s relativní chybou 6,5%. To odpovídá tabulkové hodnotě pro olovo $G = 6,5 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Relativní chyba při výpočtu úlohy II. je dost velká a je dána velkou chybou při měření průměru drátu a relativně malým počtem měření.