Termodynamika plynů

1.Podmínky v laboratoři:

$T=(26,3\pm 0,05)^{0}C$ $s\,relativní\ chybou\ \sigma_T=0,19\%$
$p=(780\pm 0,005)torr=100\,400\text{Pa}$ $s\,relativní\ chybou\ \sigma_p=0,66\%$
$\varphi=56\%$

2.Teorie:

První úkol je změřit Poissonovou konstantu takzvanou **Clément-Desormesovou metodou**, přičemž je použita velká nádoba od okolní atmosféry oddělená větším ventilem, opatřená tlakoměrem a ruční pumpou přes menší ventil.
Otevřením menšího ventilu a použitím pumpy zvýším tlak v nádobě a po dosažení termodynamické rovnováhy ho odečtu ze stupnice, jako rozdíl výšek vodního sloupce h_i .Tlak se potom dopočítá jako

$$\Delta p=p_o+h_i\rho g \quad (1.)$$

, kde ρ je hustota vzduchu a g tíhové zrychlení.

Pak se krátkým otevřením většího ventilu umožní adiabatická expanze vzduchu v nádobě a opět se odečte tlak stejným způsobem.
Takto odečtené tlaky stačí, abych vypočítal Poissonovu konstantu pomocí vztahu:

$$k=\frac{h_1}{h_1-h_2} \quad (2.),$$

přičemž h_1 je rozdíl výšek vodního sloupce zaznamenán po zvýšení tlaku v nádobě a h_2 po umožnění adiabatické expanze.
Vztah (2.) vychází ze vztahu :

$$k=\frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_o}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} \quad (3.),$$

který je použit pro vyčíslení Poissonovy konstanty pro případ, když nádoba není vybavená jen tlakoměrem ale i tlakovým čidlem, které převádí tlak na elektrický proud I tímto způsobem:

$$I=I_0+c\cdot\Delta p \quad (4.),$$

kde je I_0 je proud odpovídající nulovému h_i a c je konstanta úměrnosti.

Druhý způsob je **měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku ve vzduchu**, kde platí vztah:

$$c=\sqrt{k\frac{p}{\rho}} \quad (5.),$$

kde c je rychlost zvuku ve vzduchu, k Poissonova konstanta, p je tlak při měření a ρ je hustota vzduchu při určité teplotě měření.

Teď je ještě potřeba znát rychlost zvuku, což se určí pomocí změření délky stojatého vlnění v rezonanční trubici, v které je akustické pole buzeno reproduktorem. Ten je napájen z generátoru sinusového signálu, na kterém se nastavují vhodné frekvence. V trubici je posuvný píst, pomocí kterého zaznamenáváme maxima. Rozdíl poloh sousedních maxim je polovina vlnové délky zvuku, která se vyskytuje ve vzorci :

$$c=2\left(\frac{\lambda}{2}\right)f \quad (6.)$$

3.Měření a výpočty:

Clément-Desormesova metoda

Naměřené hodnoty výšek jsou v tabulce 1.

$(h_1 \pm 0{,}5)\,mm$	$(h_2 \pm 0{,}5)\,mm$	$k=h_1/(h_1-h_2)$
204	97	1,906
190	85	1,810
196	75	1,620
198	78	1,654
192	85	1,794

Tabulka 1.

Střední hodnota $k_s=1{,}709$

Absolutní chyba při měření Poissonovy konstanty je:

$$\sigma_k=\sqrt{\frac{\Sigma(k_s-k)^2}{N(N-1)}}=\sqrt{\frac{0{,}0388+0{,}0102+0{,}0079+0{,}0025+0{,}0072}{20}}=\sqrt{0{,}00333}=0{,}0129$$

a relativní chyba $\sigma_{kr}=\frac{\sigma_k}{ks}\cdot 100\,\%=0{,}76\,\%$, pak $k=(1{,}709\pm 0{,}013)\,s\ rel.\ chybou\, 0{,}76\,\%$

Poissonovou konstantu jsme ještě spočítali pomocí vztahu (3.).Když zanedbáme konstantu úměrnosti c a víme, že $p_1-p_0=I_1-I_0$ a $p_0=I_0$, tak $p_1=I_1$.
Použijeme vzorec,

$$k=\frac{\ln\frac{I_1}{I_0}}{\ln\frac{I_1}{I_2}} \quad (7.)$$

Naměřené hodnoty jsou v tabulce 2, s tím, že je $I_0=4{,}15\,mA$.

$(h_1 \pm 0,5)\,mm$	$(I_1 \pm 0,01)\,mA$	$(h_2 \pm 0,5)\,mm$	$(I_2 \pm 0,01)\,mA$	k (7.)
191	8,08	98	5,25	1,558
190	9,32	85	5,49	1,528
196	8,78	75	5,33	1,500
198	7,86	78	5,07	1,459
192	9,33	85	5,49	1,550

Tabulka 2.

Střední hodnota k je $k = 1,519$.

Absolutní chyba tedy je $\sigma_k = \sqrt{\dfrac{(k_i - k)^2}{20}} = 0,018$ a relativní $\sigma_{rk} = \dfrac{0,018}{1,519} \cdot 100\,\% = 1,19\,\%$.

Čili $k = (1,519 \pm 0,018)$ $s\,relativní\ chybou\ 1,19\,\%$

Pomocí rychlosti zvuku ve vzduchu

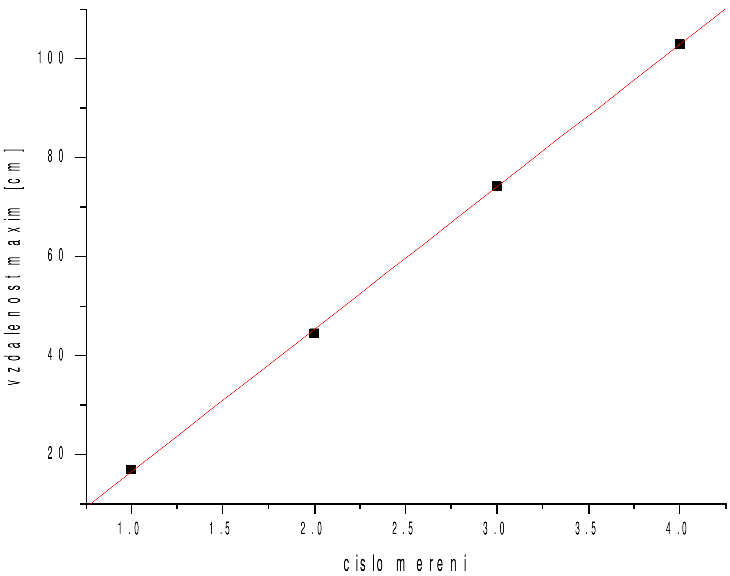
Teď následuje výpočet konstanty i třetí metodou, použitím rovnic (5.) a (6.).

Maxima byla měřena pro tři různé frekvence a jejich polohy jsou indexovaná y .

Pro první frekvenci - $f_1 = 600,2274\,Hz$ polohy maxim jsou:

$y_1 [cm]$	17,0
$y_2 [cm]$	44,5
$y_3 [cm]$	74,3
$y_4 [cm]$	103,0

Tabulka 3.



Graf 1.

Vzdálenost mezi nimi zjištěná programem „Origin“ je $d_1 = (28{,}79 \pm 0{,}31)\, cm$.

$$\sigma_{rd1} = \frac{0{,}31}{28{,}79} 100\,\% = 1{,}1\,\% \quad \text{, což znamená, že} \quad \left(\frac{\lambda}{2}\right)_{f1} = (28{,}79 \pm 0{,}31)\, cm$$

Pak $$c_1 = 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{f1} \cdot f_1 = 2 \cdot 28{,}79 \cdot 600{,}2274 = 34561{,}09 \frac{cm}{s} = 345{,}61 \frac{m}{s}$$

Přestože relativní chyba rychlosti zvuku záleží hlavně na relativní chybě vlnové délky zvuku, tak absolutní chybu spočítáme jako:

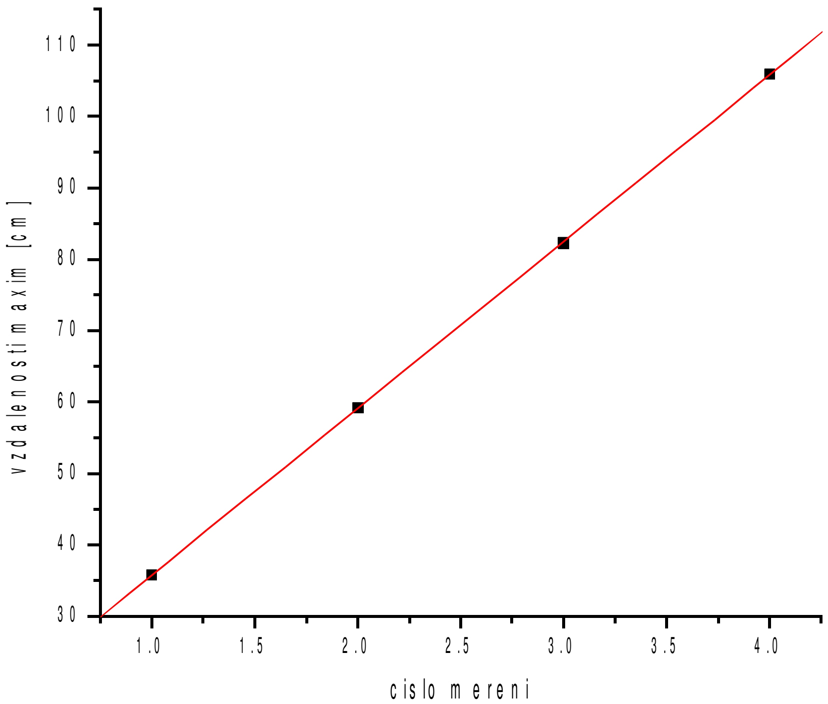
$$\sigma_{ac1} = \frac{\sigma_{rc1}}{100} \cdot c_1 = 0{,}011 \cdot 345{,}61 = 3{,}18 \frac{m}{s} \quad , \quad c_1 = (345{,}6 \pm 3{,}1) \frac{m}{s} \quad .$$

To samé provedeme pro další dvě frekvence, abychom dostali co nejpřesnější rychlost.

Pro frekvenci $f_2 = 739{,}0304\, Hz$

$y_1[cm]$	35,80
$y_2[cm]$	59,20
$y_3[cm]$	82,25
$y_4[cm]$	105,95

Tabulka 4.



Graf 2.

To znamená, že $d_2=(23{,}35\pm0{,}08)\,cm$ s chybou $\sigma_{rd2}=0{,}33\,\%$.

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{f2}=(23{,}35\pm0{,}08)\,cm$$

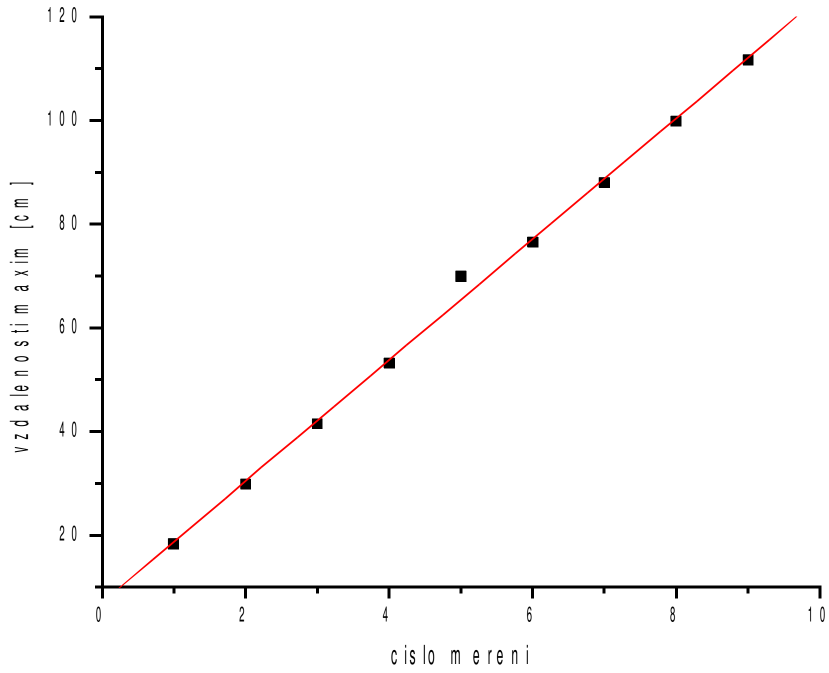
$$c_2=2\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{f2}\cdot f_2=2\cdot23{,}35\cdot739{,}0304=345{,}57\,\frac{m}{s}$$

$$\sigma_{ac2}=\frac{\sigma_{rc2}}{100}\cdot c_2=\frac{0{,}33}{100}\cdot345{,}57=1{,}14\,\frac{m}{s}\quad\text{, pak}\quad c_2=(345{,}5\pm1{,}1)\,cm\ .$$

I pro třetí frekvenci $f_3=1478{,}080\,Hz$ jsou polohy maxim:

$y_1[cm]$	18,25
$y_2[cm]$	29,80
$y_3[cm]$	41,40
$y_4[cm]$	53,15
$y_5[cm]$	64,90
$y_6[cm]$	76,50
$y_7[cm]$	88,05
$y_8[cm]$	99,85
$y_9[cm]$	111,60

Tabulka 5.



Graf 3.

A vzdálenost je:

$$d_3=11{,}67\,cm\,;\sigma_{d3}=0{,}23\,cm\,;\sigma_{rd3}=1{,}9\,\%\,;\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{f3}=(11{,}67\pm0{,}23)\,cm$$

$$c_3=2\left(\frac{\lambda}{2}\right)_{f3}\cdot f_3=2\cdot11{,}67\cdot1478{,}080=344{,}98\,\frac{m}{s}$$

$$\sigma_{ac3} = \frac{\sigma_{rc3}}{100} \cdot c_3 = \frac{1{,}9}{100} \cdot 344{,}98 = 6{,}55 \frac{m}{s} \quad , \quad c_3 = (344{,}9 \pm 6{,}6)\, cm$$

$$c = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{3} = \frac{345{,}61 + 345{,}57 + 344{,}98}{3} = 345{,}38 \frac{m}{s}$$

Chyby udělané při výpočtu jsou :

$$\sigma_c = 7{,}37 \frac{m}{s} \quad ; \quad \sigma_{rc} = \frac{7{,}37}{354{,}87} \cdot 100\% = 2\% \quad .$$

Na konec se může pomocí vztahu (5.) vypočítat Poissonova konstanta:

$$k = \frac{c^2 \cdot \rho}{p} = \frac{(345{,}38)^2 \frac{m^2}{s^2} \cdot 1{,}184 \frac{kg}{m^3}}{100400 \frac{N}{m^2}} = 1{,}406$$

Relativní chyba bude záviset na relativní chybě rychlosti zvuku a naměřeného tlaku. Chybu hustoty vzduchu na dané teplotě nebudeme započítávat, protože se jedná o tabulkovou hodnotu.

Pak ,

$$\sigma_{kr} = \sqrt{(2 \cdot \sigma_{rc})^2 + (\sigma_{rp})^2} = \sqrt{(2 \cdot 2)^2 + (0{,}66)^2} = 4{,}05\%$$

$$\sigma_k = \frac{\sigma_{rk}}{100} \cdot k = 0{,}04 \cdot 1{,}406 = 0{,}05$$

Poissonova konstanta tedy vychází:

$$k = (1{,}40 \pm 0{,}05) \quad , \quad s\, relativní\ chybou\ 4\% \quad .$$